数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 203-213

オイラーの数学と『ドイツ公女への手紙』
―オイラーが残した不可解な数値―

広島大学大学院理学研究科　高橋 浩樹 (Hiroki Takahashi)
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Hiroshima University

18 世紀最大の数学者レオンハルト・オイラーの主要著書『無限解析入門』(1748)（邦訳書 [4]）には，全集 [3] で指摘されているように大量の数値の間違いがある．[9] では，これらの間違いを単純な計算間違いに帰着することは困難であるとして，次の仮説を紹介した．

『無限解析入門』における大量の数値の微妙な間違いは単なる間違いなどではなく，オイラーの意図的な「問題」であり，その解答は『公女への手紙』に記されている．

本稿では，仮説の根拠をまとめて提示し,「問題」の意図を推測する．

まず §1 では，数値リストおよび誤差を示し，その異常な点について説明する．次に §2 では,「問題」を解くためのヒントであると考えられる箇所を指摘する．§3 では,「問題」に対する解答案を与え，その導き方と確認方法について説明する．最後に §4 では，オイラーのいくつかの主張を参考にして「問題」の意図を推測する．

「問題」は，オイラーが探求した様々な学問領域に関わるものと考えられ，彼の行動原理を知るために極めて重要ではないかと推測している．現時点では「問題」に対する不完全な解答案しか示されていないが，オイラーを敬愛する多くの研究者の挑戦によって，広く理解される解答が得られる日が来ることを期待したい．

なお，広大な領域に数多くの重要な源泉を残したオイラーの出題者としての性格は広く知られている．([2][5][6] 等を参照）この仮説はあらためてそれを強調するものであって，従来のオイラー像に反するものではないことを付け加えておきたい．

§1. 『無限解析入門』の数値の誤差

数値の間違いは最終桁付近のみにある．以下のリストでは，[7] において計算した数値および『入門』の数値との差を記した．例えば，$\log_{10} 2$ の小数点以下 7 桁の正しい切捨て値は 0.3010299 であるが,『入門』では 0.3010300 と記されている．

第 1 巻

第 6 章, p.77

$\log_{10} 2$	$=$	0.3010299	$+1$
$1/\log_{10} 2$	$=$	3.3219280	-3

第 7 章

P1	$\log n$	
$l7$	1.9459101490553133051053527	$+1112$
$l8$	2.0794415416798359282516963	$+1$
$l9$	2.1972245773362193827904904	$+1$

第8章

P2 $s_k = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\pi^k}{2^k k!}$

01	+1.5707963267948966192313216916	−0
03	−0.6459640975062462536557565638	+2
05	+0.0796926262461670451205055494	−6
07	−0.0046817541353186881006854639	+7
09	+0.0001604411847873598218726608	−3
11	−0.0000035988432352120853404585	+5
13	+0.0000000569217292196792681177	−6
15	−0.0000000006688035109811467232	+8
17	+0.0000000000060669357311061956	−6
19	−0.0000000000000437706546731374	+4
21	+0.0000000000000002571422892860	−4
23	−0.0000000000000000012538995405	+2
25	+0.0000000000000000000051564551	−1
27	−0.0000000000000000000000181239	+0
29	+0.0000000000000000000000000550	−1

$c_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\pi^k}{2^k k!}$

00	+1.0000000000000000000000000000	−0
02	−1.2337005501361698273543113749	+4
04	+0.2536695079010480136365633663	−4
06	−0.0208634807633529608730516372	+8
08	+0.0009192602748394265802417162	−4
10	−0.0000252020423730606054810530	+4
12	+0.0000004710874778818171503670	−5
14	−0.0000000063866030837918522410	+2
16	+0.0000000000656596311497947236	−6
18	−0.0000000000005294400200734623	+3
20	+0.0000000000000034377391790986	−5
22	−0.0000000000000000183599165215	+3
24	+0.0000000000000000000820675330	−3
26	−0.0000000000000000000003115284	−1
28	+0.0000000000000000000000010167	−2
30	−0.0000000000000000000000000028	+2

P3 $\frac{2(2^{n+1}-1)\pi^n |B_{n+1}|}{(n+1)!} - \frac{4}{\pi}$

05	+0.0018424752035	−1
07	+0.0001975800715	−1
09	+0.0000216977373	−128
11	+0.0000024011369	+1
13	+0.0000002664133	−1

$\frac{1}{2^{n-1}\pi} - \frac{2\pi^n |B_{n+1}|}{(n+1)!}$

03	−0.0065510747882	
05	−0.0003450292553	−1
07	−0.0000202791060	
09	−0.0000012366527	
11	−0.0000000764958	−1

第11章

PA $\zeta(k)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

$E = 1.00001704136304482548818$	+1998
$F = 1.00000188584858311957590$	
$H = 1.00000002323715737915670$	
$L = 1.00000000003186677514044$	
$Q = 1.00000000000000053965957$	
$W = 1.00000000000000000000913$	

PB $\zeta(k)\frac{1}{2^k}$

$\varepsilon = 0.00097753376477325984896$	+2
$\xi = 0.00024420070472492872273$	+1
$\theta = 0.00001525902225127271503$	−1526
$\lambda = 0.00000023841863595259255$	−101
$\pi = 0.00000000023283064370808$	−1
$\phi = 0.00000000000022737367545$	−1
$\omega = 0.00000000000000355271368$	−1

第 15 章

PC	$v(k)=\sum_{p:\text{素数}}\frac{1}{p^k}$	
02	0.452247420041065	+157
04	0.076993139764246	+6
06	0.017070086850637	+2
08	0.004061405366518	−3
10	0.000993603574437	−804
12	0.000246026470035	−2
20	0.000000953961124	−1
30	0.000000000931326	−3

第 2 巻

第 21 章	(∼ cos log 2)	
$\log_{10} 2^{\sqrt{2}}$	= 0.4257207	+67
$2^{\sqrt{2}}$	= 2.665144	+42
$10^{\sqrt{2}}$	= 25.954553	+1317

第 22 章	(sin 1∼)	
cos log 2	= 0.76923890136397	−989
sin 1	= 0.84147098480789	−275
cos 1	= 0.54030230586813	−2472

$s+\cot s$	
−0.17200818	−1
−0.09062597	−1
−0.05892836	−2
−0.04258548	−5

特に，正弦・余弦のリストでは間違いの割合が高く，[9] では次の異常な点を挙げた．

1. 31 個の数値中 28 個もの間違いがある．
2. 小数点以下 28 桁という中途半端な精度である．
3. 誤差の数値に対する割合は急激に膨張している．
4. 誤差は最終 1 桁の範囲に収まっている．
5. ひとつのデータのみ絶対値が正値より大きい．
6. **誤差を音階に対応させると巧みに構成された曲になる．**

当然のことながら，これらの間違いをある単純なアルゴリズムから系統的に生じるものとして説明できれば，オイラーの意図などという仮説は考えなくても済む．しかしながら，この問題を提示してから 3 年以上が経過したが，どのリストに対してもそういった説明は得られていない．

さらに厄介なことに，P2 のリストとほぼ同じ次ページのリストが，E128（1739 年著，1750 年出版）において掲載されており，このリストの間違いもあわせて考察する必要がある．ほとんどの数値は同じであるが，正弦の係数の最終桁の数字が 825014006 から 735005005 に変化している．変化があった数字はいずれも修正になっておらず，間違いの個数は 28 個のままである．

結局のところ，単一のアルゴリズムからこれら 2 つのリストの間違いを系統的に説明することは，おそらく不可能であると言わざるを得ない．

Erit igitur sinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 graduum =

$+\frac{m}{n}$.	1,5707963267948966192313216916	
$-\frac{m^3}{n^3}$.	0,6459640975062462536557565636	
$+\frac{m^5}{n^5}$.	0,0796926262461670451205055487	8
$-\frac{m^7}{n^7}$.	0,0046817541353186881006854633	2
$+\frac{m^9}{n^9}$.	0,0001604411847873598218726605	
$-\frac{m^{11}}{n^{11}}$.	0,0000035988432352120853404580	
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}$.	0,0000000569217292196792681170	1
$-\frac{m^{15}}{n^{15}}$.	0,0000000006688035109811467225	4
$+\frac{m^{17}}{n^{17}}$.	0,0000000000060669357311061950	
$-\frac{m^{19}}{n^{19}}$.	0,0000000000000437706546731370	
$+\frac{m^{21}}{n^{21}}$.	0,0000000000000002571422892855	6
$-\frac{m^{23}}{n^{23}}$.	0,0000000000000000012538995403	
$+\frac{m^{25}}{n^{25}}$.	0,0000000000000000000051564550	
$-\frac{m^{27}}{n^{27}}$.	0,0000000000000000000000181239	
$+\frac{m^{29}}{n^{29}}$.	0,0000000000000000000000000549	
$-\frac{m^{31}}{n^{31}}$.	0,0000000000000000000000000001	×

E128 の正弦のマクローリン展開

§2. 『無限解析入門』『公女への手紙』『美しい関係』におけるヒント

§1 の間違いはオイラーの何らかの意図を表しているという仮説に対し，抽象的な数字によって具体的な意図を表現することは困難ではないかという反論はもっともである．数字は様々な対象を表現できるため，多様な解釈を許してしまうからである．したがって，もしこれがフェアな謎掛けならば，誤差以外に数字の解釈を方向付けるようなヒントが記されているはずである．

以下に私がヒントであると考えた主要な箇所を列挙する．紙数の関係上，詳細については [7] [8] をご覧いただきたい．なお，謎解きにおいてヒント・解答案を明示するという品を欠く行為について，出題者と潜在的な解答者に対しお詫びしたい．

『無限解析入門』（1745 年著，1748 年出版）第 1 巻の巻頭の図

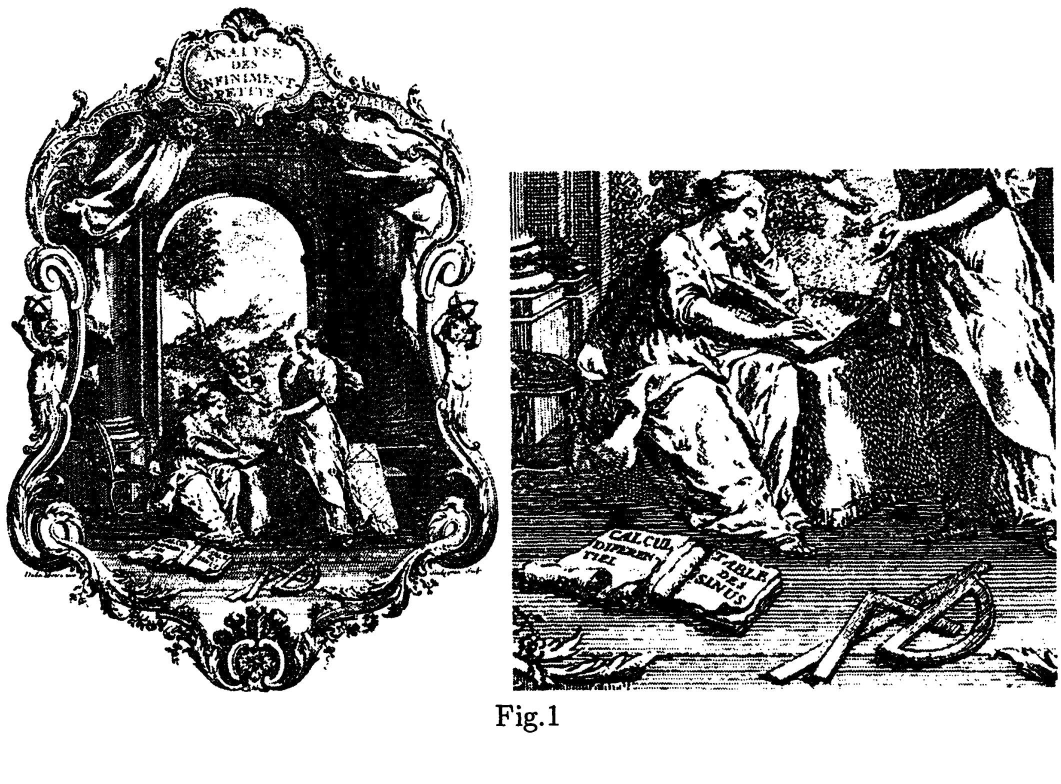


Fig.1

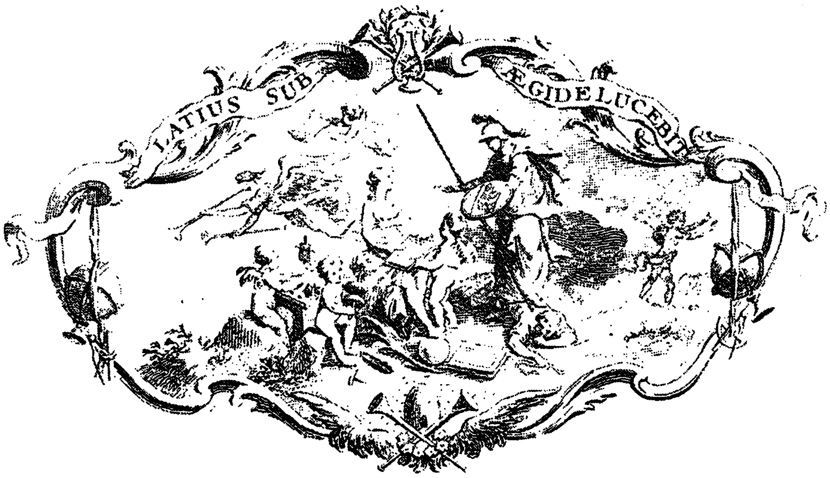


Fig.2

Fig.3

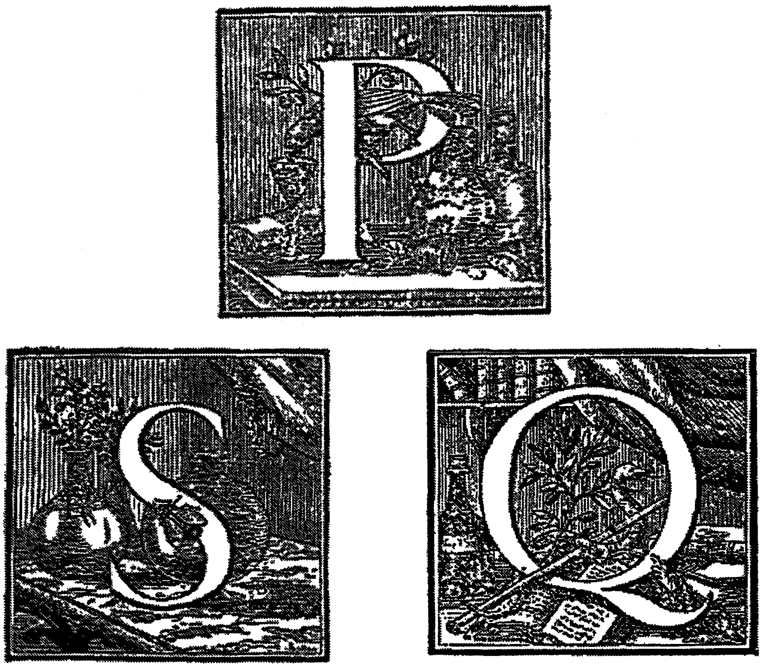


Fig.4

第1巻第6章の例

例B $\log_{10} 5$ （右の数値が正しい切捨ての値）

$A = 1.000000$		$lA = 0.0000000$		
$B = 10.00000$		$lB = 1.0000000$		$C = \sqrt{AB}$
$C = 3.162277$		$lC = 0.5000000$		$D = \sqrt{BC}$
$D = 5.623413$		$lD = 0.7500000$		$E = \sqrt{CD}$
$E = 4.216964$	5	$lE = 0.6250000$		$F = \sqrt{DE}$
$F = 4.869674$	5	$lF = 0.6875000$		$G = \sqrt{DF}$
$G = 5.232991$		$lG = 0.7187500$		$H = \sqrt{FG}$
$H = 5.048065$		$lH = 0.7031250$		$I = \sqrt{FH}$
$I = 4.958069$	8	$lI = 0.6953125$		$K = \sqrt{HI}$
$K = 5.002865$	4	$lK = 0.6992187$		$L = \sqrt{IK}$
$L = 4.980416$		$lL = 0.6972656$		$M = \sqrt{KL}$
$M = 4.991627$		$lM = 0.6982421$		$N = \sqrt{KM}$
$N = 4.997242$	3	$lN = 0.6987304$		$O = \sqrt{KN}$
$O = 5.000052$	3	$lO = 0.6989745$	6	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4.998647$		$lP = 0.6989525$		$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4.999350$		$lQ = 0.6989135$		$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4.999701$		$lR = 0.6989440$		$S = \sqrt{OR}$
$S = 4.999876$	7	$lS = 0.6989592$	3	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4.999963$	5	$lT = 0.6989668$	9	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5.000008$	9	$lV = 0.6989707$		$W = \sqrt{TV}$
$W = 4.999984$	7	$lW = 0.6989687$	8	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4.999997$	8	$lX = 0.6989697$	8	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5.000003$		$lY = 0.6989702$	3	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5.000000$		$lZ = 0.6989700$		

例 C1　$2^{\frac{7}{12}}$ の値を求めよ．
例 C2　ある地域の人口が毎年 1/30 ずつ増加するとき，最初 100000 人の住民が住んでいたとして，100 年後の人口を求めよ．
例 C3　洪水の後，6 人の人間から人類が増えたとして，200 年後に 1000000 人に達したとき，人口は毎年どの程度の割合で増加しているか．
例 D1　人口が 1/100 ずつ増加していくとき，人口が 10 倍になるのは何年後か．

第2巻第22章の問題 (Problema) と解答 (Solutio)

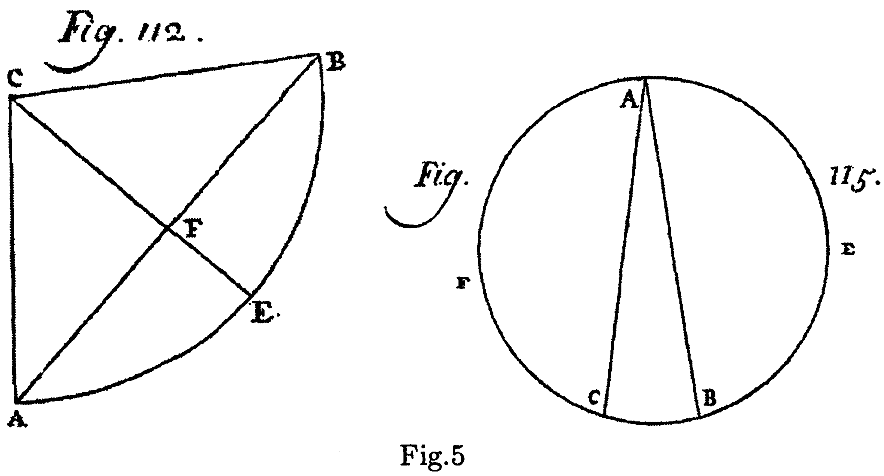


Fig.5

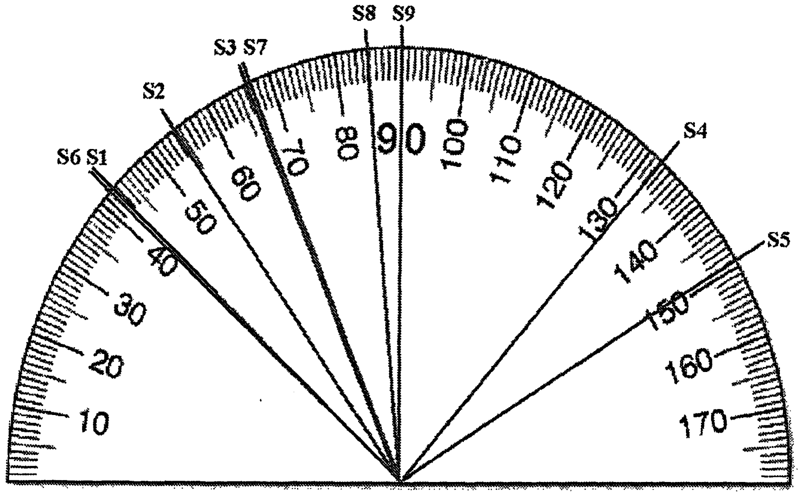


Fig.6

『公女への手紙』(1760-62 年著，1768-70 年出版)
第 1 通目

「全て広大無辺なるは全能者のみわざ」

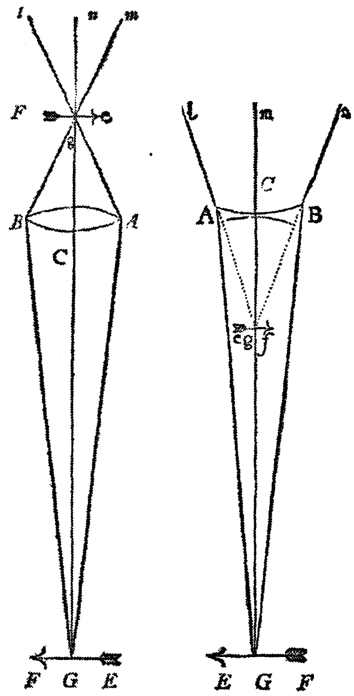
第 4 通目

LETTRE IV.

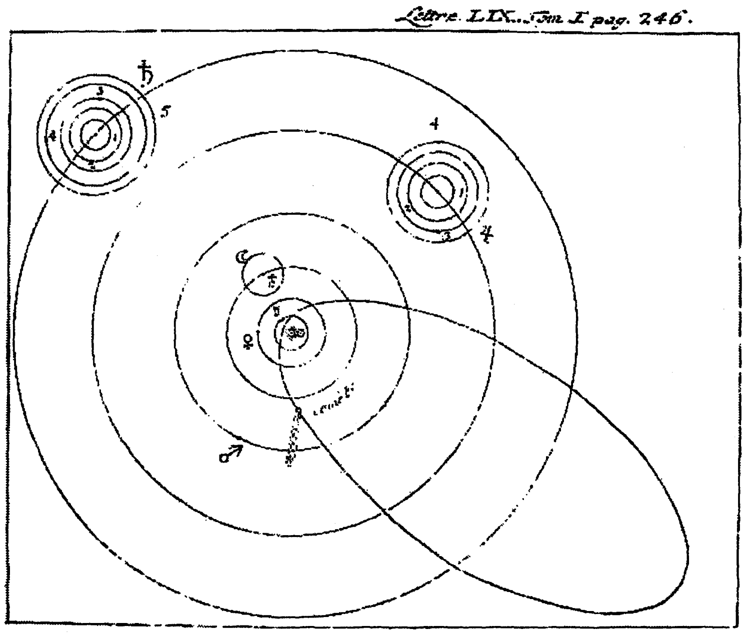
Votre Alteſſe vient d'interrompre le fil de mes penſées d'une maniere très gracieuſe . . .

. . . .

第 39 通目



第 59 通目



『美しい関係』（1749 年著，1768 年出版）

$$\odot = 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \&c.$$

$$☽ = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \&c.$$

§3. 「問題」の解答案

まず，問題・ヒント・解答であると解釈した箇所は，各著作の本論にはほとんど影響のないことに注意したい．すなわち，近似値・例題・図がわずかに間違っていたり奇妙であったりしたところで，おそらく誰にも実害を与えないと考えられる．

『無限解析入門』のヒント

Fig.1 では,「代数学（代数の計算)」「解析学（正弦・微分計算)」「幾何学（定木・分度器)」と「無限小解析への入り口」が描かれている．これは『無限解析入門』の目標として，緒言に明記されているものである．

Fig.2 では,「音楽（竪琴・ラッパ)」と「幾何学（分度器・コンパス・球儀)」が描かれている．音と光は，遠隔地間の伝達手段として古代から用いられてきた．ギリシャ神話の知恵・芸術・工芸・戦略の女神アテナに関わる図と見られ，Bousquet の出版物に使用されている．

Fig.3 では,「解剖学（鳥・哺乳類・人間)」と「幾何学（コンパス・図)」と「天文学（望遠鏡)」が描かれている．書き物をしている人物が見られるが，その内容は不明である．ここで解剖学は，数学との関連がはっきりしないので少々唐突に思える．他方，古代ギリシャのピタゴラス学派における Mathematics の語源「マテーマタ（学ばれるべきもの)」は「算術・音楽・幾何学・天文学」の四科であったので，これらが登場することには違和感はない．

Fig.4 では，P は「鳩とオリーブ」，S は「ハエか蜂のような小動物」，Q は「蛇と杖」が記されている．P は旧約聖書の創世記のノアの箱舟にオリーブを持ち帰った鳩，Q は出エジプト記で登場する蛇に変身するモーセの杖が想起される．この連想により，S の小動物は「蜜蜂」と考えるのが自然であろう．なぜならば，鳩がオリーブを持ち帰った場所という問題 (Problema) を，モーセは神より蛇の杖を与えられながら探求 (Quaestio) し，最終的に得られたのが「乳と蜜流れる約束の地エルサレム」という解答 (Solutio) であったからである．この種の謎掛けが『無限解析入門』にあることを認識しておくと，オイラーの「問題」を理解しやすくなる．

例 B の左の数値リストの最終の数字を上下交互にうまく読むと (73-37,44,1)-(59,48,5)-(67,36,2)-(157,2) となり，右の数値リストの最終の数字を下からうまく読むと 20-777-028-555-7614 となる．この時点では意味不明の間違いであるが，最終的には全解答のチェックであると推測される．

例 C1 の $2^{\frac{7}{12}}$ は,「音楽」における平均律の完全 5 度の周波数比として有名な数である．例 C3 の洪水とは，旧約聖書の創世記におけるノアの洪水であり，6 人とはノアの息子たちとその妻たちのことであると推測される．P,S,Q の文字絵が旧約聖書からの引用であることに気が付けば，この推測は難しくない．例 C2 の計算では $31/30 = 1.033333\cdots$ という数が登場し，例 D1 の計算では $101/100 = 1.01$ という数が登場する．

Fig.5 は第 2 巻第 22 章の問題図のうち，どうしたわけか D が記されていない 2 つの図である．角度を求める問題が全部で 9 問あり，解答の締めくくりに Q.E.I. と Q.E.F. が登場するが有名な Q.E.D. のみが登場しないことに注意する．この 2 つのグラフの頂点数はいずれも 5 である．そして，Fig.112 の双対グラフは不変である一方，Fig.115 の双対グラフはケーニヒスベルグの 7 つの橋に変化する．

Fig.6 で示すように，解 S1 と S6 が近似して約 42 度，S2 は約 54 度，S3 と S7 が近似して約 67 度，S4 は約 132 度，S5 は約 149 度，S8 は約 84 度，S9 の最初の解は 90 度 −90 度と表記されている．ここで，90 度 $= 1.5708\cdots$ に注意する．

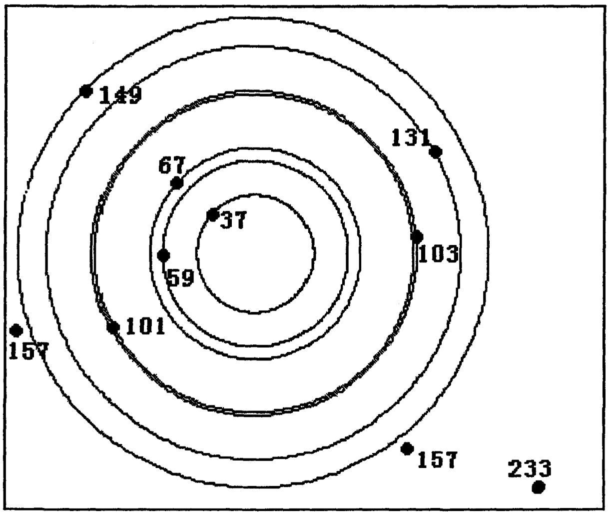
『無限解析入門』の解答案

P1:まず P1 の間違いの原因となった文の最初の 2 つの大文字は「PS」であり，すでに例 C1 で「音楽」，例 C3 では「旧約聖書」が登場しているため，旧約聖書の中の音楽である詩篇 (Psalm) が想起される．([7] 第 4, 10 章）詩篇 111 第 2 節は「偉大なるは神のみわざ．それを愛する者は皆それを尋ね求める」である．オイラーは，プロテスタントであり世界の探求者であった．

P2:詩篇は歌であるため，その楽譜が問題となる．P2 の誤差を音階に対応させることにより，8686 の韻律（コモン・ミーター）の曲が構成され，巻頭図で示された「音楽」が登場する．(楽譜は [8] 附録 C または [9] を参照.『讃美歌』（日本基督教団出版局）10, 11 の 42+6+6=54 拍が基本）

P3:巻頭図に示された「幾何学」をヒントにすると，P3 の 7 つの誤差の位置からケーニヒスベルグの 7 つの橋が想起される．([7] 第 6 章）$128 = 2^7$ であることに注意する．

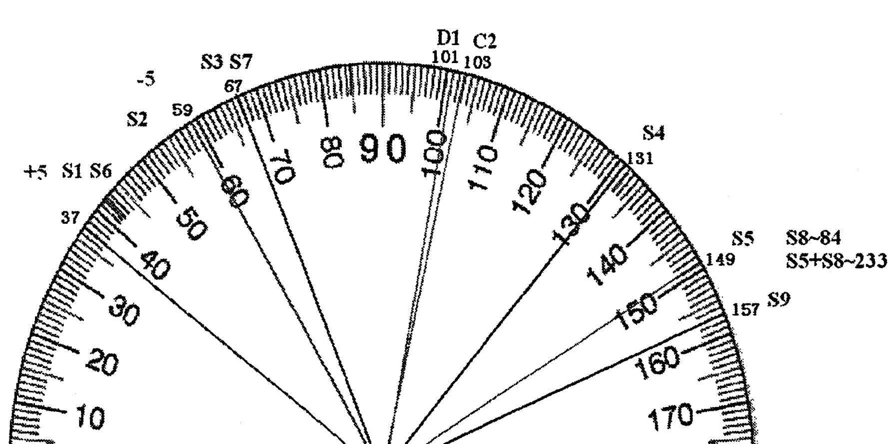
PA, PB, PC: PA, PC の大きな誤差を素因数分解すると，PA:$1998 = 54 \times 37$, PC:$804 = 12 \times 67$ から，最小の非正則素数 37 と 3 番目の 67 が現れる．非正則素数とは，ゼータ値の有理数部分の分子に現れる素数のことである．PA と PB の誤差を合わせると $472 = 8 \times 59$ であり 2 番目の非正則素数 59 も登場する．(足し合わせる理由は [8] の第 2 部第 5 章と第 11 章を参照）以下に 9 番目までの非正則素数と指数を記す.
(37, 32) (59, 44) (67, 58) (101, 68) (103, 24) (131, 22) (149, 130) (157, 62) (157, 110) (233, 84)



非正則素数はゼータ値の分子に $p-1$ の周期で現れる．この周期性を考慮に入れて時計回りに非正則素数と指数の組をプロットすると，上の図が得られる．この図から太陽系が想起され，ゼータ値から「天文学」が登場することになる．ゼータと太陽系の関連は独特な発想であるが,『美しい関係』ではゼータが太陽および月の記号で表されているので，この論文を参考にすると対応させやすくなっている．

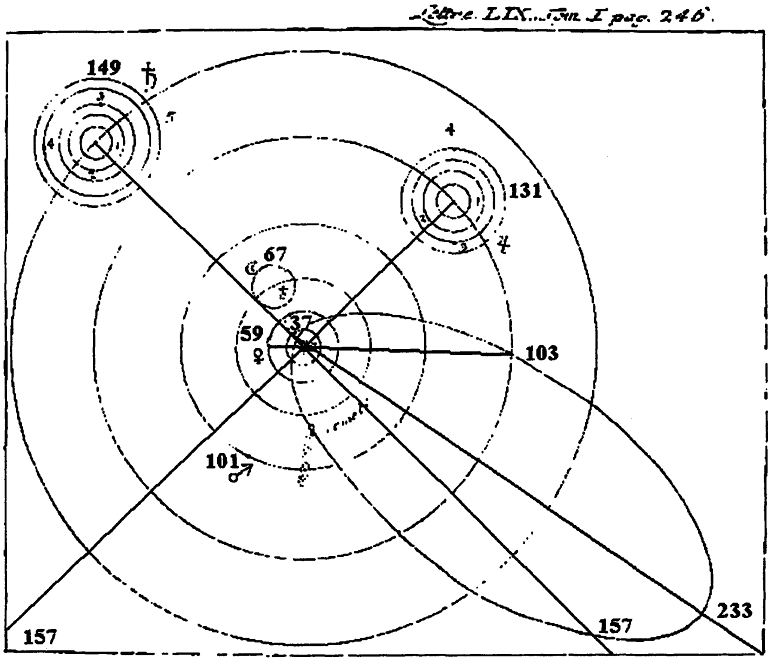
『無限解析入門』第 2 巻による解答確認

PC, PB, PA：「67, 42, 1317」から 3 つの非正則素数が表現された楽譜の確認．([8] 附録 C）
P3, P2, P1：「−989, −275, −2472」から誤差の和の確認．誤差の誤差から解答確認．([7] 第 8 章）
P3 のグラフ：Fig.5 の 2 つのグラフとそれらの双対グラフから確認．([7] 第 6 章）



非正則素数: C2≈1.03, D1=1.01, S3≈ S7≈67, S4≈131, S5≈149, S5+S8≈233, S9= 1.57 − 1.57. S1≈S6≈42∼37, S2≈54∼59 は, +5 と −5 のずれがある.

『公女への手紙』による解答確認
P1: 第 1 通目の最後の言葉から PS.111-2 前半の確認. 後半は第 20 通目.
P2: 第 4 通目の手紙のドットから楽譜・詩篇の確認. (42+11+6=59 拍, 11-12 など)
P3: 第 39 通目の D が記されていない左のグラフを上下に分割して Fig.112, 左右に分割して Fig.115, 右のグラフからケーニヒスベルグの 7 つの橋の確認.
PA, PB, PC: 第 59 通目の太陽系の図により前ページの図を確認できる. 軌道の幅を 16 : 22 : 37 : 67 : 103 : 101 : 131 : 149 に変えると惑星と非正則素数がほぼ対応する. ([7] p.183 を参照) 木星と土星の記号は 4 と 5 であり 131 と 149 が対応するが, これは『入門』の S4, S5 と符合する.



以上の解答案を『公女への手紙』を参考にしてまとめると, 次のようになる.

7 リスト	関数	学問領域	物理	内容
B	$\log_{10} 5$	算術	数	全解答確認
P1	対数	神学	空間	詩篇
P2	正弦・余弦	音楽	音	楽譜
P3	正接・余接	幾何学	光	グラフ
PA	ゼータ A	天文学	重力	非正則素数 37
PB	ゼータ B	天文学	重力	非正則素数 59
PC	ゼータ C	天文学	重力	非正則素数 67

§4. 「問題」の意図

オイラーの主張を以下に列挙する.

・数学における発見の泉について (『入門』の緒言より)

「実際, 私はためらうことなく言明したいと思う. この書物には明らかに新しい事物の数々がおさめられているが, それればかりではなく泉もまたあらわになっていて, そこからなお多くの際立った発見が汲まれるのである, と」

・数学のさらなる発達について（フリードリッヒ大王宛ての『崇高なる高等数学』より）

「初等数学に対し認められている有用性は，高等数学においてなくなるものではなく，むしろ逆に，この学問の中で程度があがるほど増大する．そして数学は，極めて一般的な実践的応用が要請する段階まで，まだ発達していないということである」

・謎解きの喜びについて（『公女への手紙』第8通目より）

「もしその謎の意味を推測し，それが謎の問題の中に完全に表現されていることを発見したとき，発見の大いなる喜びを感じる」

・微かな違いの重要性について（『公女への手紙』第118通目より）

「同じ出来事に対する報告の微かな違い (une petite différence) は，その真実性を弱めるのではなく，むしろ証明するのである」

・論拠では到達できない存在について（『自由思想家の非難に対する抗弁』より）

「自由思想家が聖書の中の（彼らには明らかな）矛盾点により聖書を完全に否定しようとするとき，彼らは最も不公平で無責任な態度をとっている．このような人々のほとんどは，彼らが幾何学や物質の存在あるい運動に対する問題点を解決できず，しかも誰ひとりとしてこれらの真実性や現実性については否定していないことを認めなければならない．... 啓示による教義においても，少なくとも同等の大きな困難が存在し，それは論拠によっては到達できないものである」

『公女への手紙』の第2巻には，さらに多くのオイラーの主張が記されている．それらの主張と度重なる奇妙な間違いおよび記述から総合的に判断して，私はオイラーの「問題」の意図を次のように推測している．

1. 『無限解析入門』では，微かな数学の中に，探求すべき広大な世界を記した．
2. 『公女への手紙』では，広大な世界の中に，探求すべき微かな数学を記した．
3. 『美しい関係』では，探求すべきこれら二つの世界を美しく結び付けた．

参考文献

[1] Archive staffs 『Euler Archive』(http://www.math.dartmouth.edu/~euler/)
[2] W・ダンハム『オイラー入門』
(シュプリンガー・フェアラーク東京, 黒川・若山・百々谷訳)
[3] L・オイラー『Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series 1, Volume 8, 9』 (Birkhäuser)
[4] L・オイラー『オイラーの無限解析』『オイラーの解析幾何』
(海鳴社, 高瀬正仁訳)
[5] E・A・フェルマン『オイラー その生涯と業績』
(シュプリンガー・フェアラーク東京, 山本敦之訳)
[6] A・ヴェイユ『数論 歴史からのアプローチ』(日本評論社, 足立恒雄・三宅克哉訳)
[7] 高橋浩樹『無限オイラー解析』(現代数学社)
[8] 高橋浩樹『無限解析の源流』 (現代数学社)
[9] 高橋浩樹『無限解析入門』の誤差について，数理解析研究所講究録 1583

2010年8月25日講演，11月23日記す